

الإمتحان السداسي الأول في مقياس الجبر

قسم: تكنولوجيا المدة: ساعتان سنة أولى جذع مشترك تكنولوجيا

التمرين الأول (Micro) (10 نقاط):

(1) لتكن p, q, r ثلاث قضايا :
باستخدام جدول الحقيقة، بين صحة القضية φ التالية: $\varphi: (p \vee r) \Rightarrow [(\bar{p} \vee q) \vee (q \Rightarrow \bar{r} \wedge \bar{p})]$.

(2) برهن بالتراجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}^*: \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

(3) ليكن $a > 0, b > 0$. برهن بالعكس النقيض أن:

$$\frac{a}{b} > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a+2b}{a+b} < \sqrt{2}.$$

(4) تذكر: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(أ) برهن بالخلف أن: $\forall a, b \in \mathbb{Z}: a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

(ب) أستنتج أنه إذا كان: $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ فإن:

$$(m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}) \Rightarrow (m = p \text{ و } n = q).$$

التمرين الثاني (06 نقاط):

(1) لتكن المجموعتان A, B بحيث: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 4x - y = 1\}$ و $B = \{(t+1, 4t+3), t \in \mathbb{R}\}$.
برهن أن: $A = B$.

(2) لتكن A, B مجموعتان جزئيتين من المجموعة E .

$$(A \cap B) \cup \bar{B} = A \cap \bar{B} \quad (\text{أ} \text{ بين أن:})$$

$$(A \cap B) \cup \bar{B} = A \iff A \cap B = \emptyset \quad (\text{ب} \text{ برهن أن:})$$

التمرين الثالث (04 نقاط):

نعتبر التطبيق $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ المعرفة بـ: $f(n) = \frac{1}{n^2}$.

(1) عين $Im(f)$, $f^{-1}(B)$ حيث: $B = \{\frac{1}{2}, 9\}$.

(2) هل f متباين؟ غامر؟ علل.

بالتوفيق

First Exam of Algebra

1st common core Technology

14-01-2024

Exercise 01 (10 points)

1. Let p, q, r be three statements.

Using a truth table, show the truth of the following proposition φ :

$$\varphi : (p \vee r) \implies [(\bar{p} \vee q) \vee (q \implies \bar{r} \wedge \bar{p})].$$

2. Prove by induction method that

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

3. Let $a, b > 0$. Show by contraposition method that:

$$\frac{a}{b} > \sqrt{2} \implies \frac{a+2b}{a+b} < \sqrt{2}.$$

4. We recall that: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

- a) Prove by absurde method that

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0.$$

- b) En deduce that if $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, then

$$(m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}) \implies (m = p \text{ and } n = q).$$

Exercise 02 (06 points)

1. Let A, B two sets, such that: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y = 1\}$ and $B = \{(t+1, 4t+3), t \in \mathbb{R}\}$.

Prove that $A = B$.

2. Let A, B be subsets of E .

- a) Show that $(A \cap B) \cup \bar{B} = A \cap \bar{B}$.

- b) Prove that

$$(A \cap B) \cup \bar{B} = A \iff A \cap B = \emptyset.$$

3. ~~Prove that $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.~~

Exercise 03 (04 points)

We consider the application $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ define by: $f(n) = \frac{1}{n^2}$.

1. Determine $Im(f)$, $f^{-1}(B)$ such that $B = \{\frac{1}{2}, 9\}$.

2. f is it injective? surjective? Justify.

Remark: Exercise 01: Micro — Good Luck

$$f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$n \mapsto f(n) = \frac{1}{n^2}$$

$$\text{Im}(f) = \{f(n) : n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$= \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots\right\} \quad (0.5)$$

$$P = \text{Im}(f) \times \{1\}$$

$$P = f^{-1}(B) \quad *$$

$$f^{-1}(B) = \{n \in \mathbb{N}^* : f(n) \in B\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N}^* : f(n) \in \left\{\frac{1}{2}, 9\right\}\} \quad (0.5)$$

$$f(n) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{N}^* \quad (0.25)$$

$$f(n) = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} = 9 \Leftrightarrow n = \pm\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}^* \quad (0.25)$$

$$f^{-1}(B) = \emptyset \quad (0.5) \quad \text{وذا}$$

* Is f injective?

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}^* : f(n_1) = f(n_2) \stackrel{?}{\Rightarrow} n_1 = n_2 \quad (0.5) \quad (2)$$

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}^* : f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow \frac{1}{n_1^2} = \frac{1}{n_2^2} \Rightarrow n_1^2 = n_2^2 \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow n_1 = n_2$$

وذا f is injective

* Is f surjective?

$$\forall y \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N}^* : y = \frac{1}{n^2} \quad (0.5)$$

f is not surjective, because of this example:

$$\text{Let } y = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \nexists n \in \mathbb{N}^* : f(n) = \frac{1}{2} \quad (\text{as the square of an integer}) \quad (0.5)$$

$A \subset B$ *

نكون: $(n, y) \in A$ بحيث: $4n - y = 1$ (0,25)

ومن ثم: $(n, y) = (4n - 1)$ (0,25)

و نتعويض n بـ $t+1$ ، نحصل:

$(n, y) = (n, 4n - 1) = (t+1, 4t+3) \in B$ (0,5)

ومن ثم: $(n, y) \in B$ (0,25)

اذن (1) ... $A \subset B$ (0,25)

من (1) - (2) نحصل: $A = B$ ✓

(2) $(A \cup B) \cap \bar{B} = A \cap \bar{B}$ ؟

(أثبت ان تعويض على U) $(A \cup B) \cap \bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B})$

$= (A \cap \bar{B}) \cup \emptyset$

$= A \cap \bar{B}$ (0,75)

$(A \cup B) \cap \bar{B} = A \iff A \cap B = \emptyset$ ؟

نفرض ان: $(A \cup B) \cap \bar{B} = A$ ، ونرصد ان: $A \cap B = \emptyset$ (0,5) $\Rightarrow$ ؟

لدينا حسب السؤال (1): $(A \cup B) \cap \bar{B} = A \cap \bar{B}$ (0,25)

ومن ثم: $A \cap \bar{B} = A \Rightarrow A \subseteq \bar{B} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ (0,25)

اذن: $(A \cup B) \cap \bar{B} = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ (1) ✓

نفرض ان: $A \cap B = \emptyset$ ونرصد ان: $(A \cup B) \cap \bar{B} = A$ (0,5) $\Leftarrow$ ؟

لدينا: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq \bar{B} \Rightarrow A \cap \bar{B} = A$ (0,25)

وحسب السؤال (1) فان: $(A \cup B) \cap \bar{B} = A \cap \bar{B} = A$ (0,25)

اذن: $(A \cup B) \cap \bar{B} = A \Leftarrow A \cap B = \emptyset$ (2) ✓

من (1)، (2) نحصل:

$(A \cup B) \cap \bar{B} = A \iff A \cap B = \emptyset$ ✓

(3) يمكن أن يكون $a > 0$ ، $b > 0$ ، $a < 0$ ، $b < 0$ ، أو a ، b من العكس القبيض أو لا مستترام هو :
 العكس القبيض لا مستترام هو :

(0,5) $\frac{a+2b}{a+b} \geq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \sqrt{2}$

$\frac{a+2b}{a+b} \geq \sqrt{2} \Rightarrow a+2b \geq \sqrt{2}(a+b) \Rightarrow a+2b \geq a\sqrt{2}+b\sqrt{2}$
 $\Rightarrow a-a\sqrt{2} \geq b\sqrt{2}-2b \Rightarrow a(1-\sqrt{2}) \geq b(\sqrt{2}-2)$
 (1) $\Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})}$ (لأن $1-\sqrt{2} < 0$)
 $\Rightarrow \frac{a}{b} \leq \sqrt{2}$

(0,5) $\frac{a}{b} > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a+2b}{a+b} < \sqrt{2}$

(4) (p) البرهان بالكاف :
 نعرف أن : $\forall a, b \in \mathbb{R} : a+b\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow (a \neq 0 \vee b \neq 0)$

- إذا كان : $a \neq 0$ ، فإن : $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$ (0,25)
 وهذا يناقض كون : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

- إذا كان : $a \neq 0$ ، $b=0$ ، فإن : $a+(0)\sqrt{2}=0 \Rightarrow a=0$ (0,25)
 وهذا يناقض كون : $a \neq 0$.

لذلك : $\forall a, b \in \mathbb{R} : a+b\sqrt{2}=0 \Rightarrow a=b=0$

$(m+n\sqrt{2}=p+q\sqrt{2}) \Rightarrow (m-p)+(n-q)\sqrt{2}=0$ (0,25)

كون : $m-p \in \mathbb{Z}$ و $n-q \in \mathbb{Z}$ ، بالرجوع إلى السؤال (3) السابق :

نجد أن : $(m-p=n-q=0) \Rightarrow (m=p \text{ و } n=q)$

حل المقيمين الثاني : (06/06 نقاط)

(1) (0,5) $A=B \Leftrightarrow ACB \wedge BCA$

* BCA ؟

نكون : $(n, y) \in B$ ، $\exists t \in \mathbb{R}$ ، $y=4t+3$ و $n=t+1$ (0,25)

(0,5) $4n-y = 4(t+1)-(4t+3) = 4t+4-4t-3 = 1$ ، ومنه :

(0,25) $(n, y) \in A$ ، ومنه :

(0,25) (1) $\dots \dots \dots BCA$ ، ومنه :

تصحيح الامتحان السادس الأولي (جبر)

حل التمرين (الجزء 10 نقاط)

(0,5) (0,5) (0,5) (0,5) (0,5) (0,5)

p	q	r	$\bar{p}$	$\bar{r}$	$p \vee r$	$\bar{p} \vee q$	$\bar{r} \wedge \bar{p}$	$q \Rightarrow \bar{r} \wedge \bar{p}$	$(\bar{p} \vee q) \vee (q \Rightarrow \bar{r} \wedge \bar{p})$	φ
1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1

(2) برهن بالتراجع أن: $P(n): \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

* من أجل $n=1$:

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

لذلك: $P(1)$ صحيحة (0,5)

* نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل n ونبرهن صحة $P(n+1)$ (0,5)
من أجل الرتبة $n+1$ أي:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

لدينا: نضيف إلى طرفي المعادلة $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ نجد أن:

$$(0,5) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

(0,5)

لذلك:

$$(0,5) \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+2}$$

وبالتالي:

1